NA1 B - Test 2, 30.05.2017.

1.(a) (2 poena) Neka je f neprekidna funkcija. Dokazati da je sa $||f|| = \max\limits_{-1\leq x\leq 1} |f(x)|$ definisana norma.
(b) (4 poena) Dat je problem $\min\limits_{p_n} ||f - p_n||$, gde je $p_n(x)$ polinom stepena n i $f(x) = x^{n+1}$. Napisati izraz za $p_n(x)$ koji rešava ovaj problem, kao i rezultat koji se dobija za tako određeno $p_n(x)$. Obrazložiti odgovor.

2. (4 poena) Neka je $\mathcal{P}$ skup polinoma stepena n i $p_n(x) \in \mathcal{P}$ polinom najbolje ravnomerne aproksimacije za funkciju $f(x)$. Naći u skupu $\mathcal{P}$ polinom najbolje ravnomerne aproksimacije za funkciju $h(x) = f(x) + q_n(x)$ gde je $q_n(x)$ proizvoljan polinom stepena n.

3. (5 poena) Ako postoji izvod $F'(x)$ neprekidnog operatora $F : X \to Y$ za svako $x \in C \subset X$ gde je C konveksan skup, i ako postoji konstanta L takva da je $||F'(x) - F'(y)|| \leq L||x - y||, \forall x, y \in C$, dokazati da tada za svako $x, y \in C$ važi ocena $||F(x) - F(y) - F'(y)(x - y)|| \leq \frac{L}{2}||x - y||^2$.

NA1 B - Test 2, 30.05.2017.

1.(a) (2 poena) Neka je f neprekidna funkcija. Dokazati da je sa $||f|| = \max\limits_{-1\leq x\leq 1} |f(x)|$ definisana norma.
(b) (4 poena) Dat je problem $\min\limits_{p_n} ||f - p_n||$, gde je $p_n(x)$ polinom stepena n i $f(x) = x^{n+1}$. Napisati izraz za $p_n(x)$ koji rešava ovaj problem, kao i rezultat koji se dobija za tako određeno $p_n(x)$. Obrazložiti odgovor.

2. (4 poena) Neka je $\mathcal{P}$ skup polinoma stepena n i $p_n(x) \in \mathcal{P}$ polinom najbolje ravnomerne aproksimacije za funkciju $f(x)$. Naći u skupu $\mathcal{P}$ polinom najbolje ravnomerne aproksimacije za funkciju $h(x) = f(x) + q_n(x)$ gde je $q_n(x)$ proizvoljan polinom stepena n.

3. (5 poena) Ako postoji izvod $F'(x)$ neprekidnog operatora $F : X \to Y$ za svako $x \in C \subset X$ gde je C konveksan skup, i ako postoji konstanta L takva da je $||F'(x) - F'(y)|| \leq L||x - y||, \forall x, y \in C$, dokazati da tada za svako $x, y \in C$ važi ocena $||F(x) - F(y) - F'(y)(x - y)|| \leq \frac{L}{2}||x - y||^2$.

NA1 B - Test 2, 30.05.2017.

1.(a) (2 poena) Neka je f neprekidna funkcija. Dokazati da je sa $||f|| = \max\limits_{-1\leq x\leq 1} |f(x)|$ definisana norma.
(b) (4 poena) Dat je problem $\min\limits_{p_n} ||f - p_n||$, gde je $p_n(x)$ polinom stepena n i $f(x) = x^{n+1}$. Napisati izraz za $p_n(x)$ koji rešava ovaj problem, kao i rezultat koji se dobija za tako određeno $p_n(x)$. Obrazložiti odgovor.

2. (4 poena) Neka je $\mathcal{P}$ skup polinoma stepena n i $p_n(x) \in \mathcal{P}$ polinom najbolje ravnomerne aproksimacije za funkciju $f(x)$. Naći u skupu $\mathcal{P}$ polinom najbolje ravnomerne aproksimacije za funkciju $h(x) = f(x) + q_n(x)$ gde je $q_n(x)$ proizvoljan polinom stepena n.

3. (5 poena) Ako postoji izvod $F'(x)$ neprekidnog operatora $F : X \to Y$ za svako $x \in C \subset X$ gde je C konveksan skup, i ako postoji konstanta L takva da je $||F'(x) - F'(y)|| \leq L||x - y||, \forall x, y \in C$, dokazati da tada za svako $x, y \in C$ važi ocena $||F(x) - F(y) - F'(y)(x - y)|| \leq \frac{L}{2}||x - y||^2$.